Tipps zur Serie 10:

Aufgabe 10.1:

a)

Wendet die Flächenformeln aus der Theorie an. Dabei sind alle Vektorfelder $\mathbb{K}$ mit $\text{rot}(\mathbb{K}) = 1$ eine valide Wahl.

b & c)

Wendet den Satz von Green an, vergleicht aber auch mit a), vielleicht fällt euch etwas auf.

Aufgabe 10.2:

Die grösste Schwierigkeit hier ist die Paramet-risierung des Randes von B. Teilt diesen in möglichst einfache Wegstücke auf und achtet besonders auf den richtigen Umlaufsinn $\rightarrow$ Fläche immer "links" von dem Randzyklus.

Aufgabe 10.3:

a)

Repetiert gegebenenfalls die Theorie 9 zum Linienintegral.

b)

Betrachtet $\mathbb{K}$ Mal auf der gesamten

Kreisscheibe berandet durch S_1.

Überlegt euch auch, warum man die gefundene Definitionslücke nicht einfach aus dem betrachteten Gebiet entfernen darf → Was ist der Rand eines Punktes?

c)

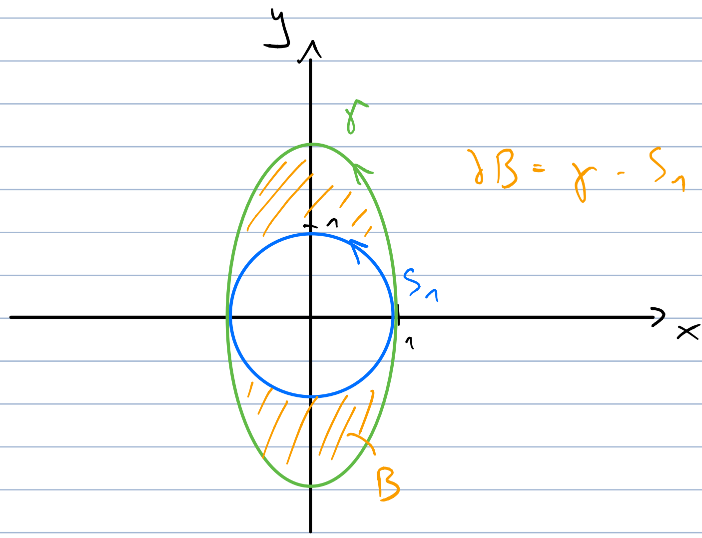
2 Möglichkeiten:

- Stur ausrechnen (nicht empfohlen)
- Den Wert auf dem Differenzbereich der Aufgabe a) & c) berechnen → das geht

mit Green?

Das Integral über γ ist dann das Integral über S_1 plus das über die Differenzfläche B mit Rand $\partial B = \gamma - S_1$.

Skizze:



$$\Rightarrow \int_\gamma K\,ds = \underbrace{\int_{\partial B} K\,ds}_{\text{Green: } \int_B \nabla \times K\,ds} + \int_{S_1} K\,ds$$

Mit der Aufgabe könnt ihr immerhin beweisen, dass falls $\mathrm{rot}(k) = 0$ gilt, <u>alle</u> Umlaufintegrale um eine Singularität denselben Wert (nicht unbedingt 0!) annehmen.
Das wird auch in KomA häufig gebraucht.

Aufgabe 10.4:

a)

Analog 10.3.a)

b)

Analoges Vorgehen zum Beispiel aus der Theorie 10.

Aufgabe 10.5:

a)

Repetiert Theorie 5 bzgl. dem impliziten Funktionentheorem. Berechnet alle Punkte, für welche die Bedingung des impliziten Funktionth. <u>nicht</u> erfüllt ist.

b)

Hier ist die grosse Schwierigkeit, die Kurve richtig zu parametrisieren und auch den Parameterbereich für die Schlaufe zu finden.
Wählt den Kurvenparameter so, dass $y(t) = x(t) \cdot t$ gilt (ist eine willkürliche Wahl, welche aber "schöne" Resultate liefert.)
$\Rightarrow$ In Funktion einsetzen um $x(t)$ zu finden und folglich $\gamma(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ t \cdot x(t) \end{bmatrix}$.

Für die Ermittlung des Parameterbereiches von t für die geschlossene Kurve von $\gamma(t)$ kann wie folgt vorgegangen werden:

1) Bestimmt, für welche t oder $\lim\limits_{t \to}$ ihr den Schnittpunkt erhaltet.

2) Überprüft, zwischen welchen zwei Kandidaten aus 1) die Kurvengleichung Sinn macht.

3) Bestimmt, wie die Kurve $\gamma(t)$ durchlaufen werden muss, damit die Fläche immer links vom Randzyklus liegt.

Die Berechnung der Fläche erfolgt dann analog zu 10.1.a), wobei das Integral durchaus schwer ist und eine geeignete Substitution hilft.